Пријемни испит из МАТЕМАТИКЕ за упис на
Докторске академске студије МАТЕМАТИКЕ

31. октобар 2015. године

Време за рад је 180 минута.
Тест има 10 задатака. **Комплетно решени** задаци 1 – 4. вреде по 3 поена, задаци 5 – 8. вреде по 4 поена и задаци 9. и 10. вреде по 6 поена.

Име и презиме: ______________________

Број освојених поена: ______________________

1. Решити екпоненцијалну једначину $3^{2x+1} - 10 \cdot 21^x + 7^{2x+1} = 0$.

2. У паралелограму $ABCD$, тачка E је средиште странице AB, права DE сече дијагоналу AC у тачки F. Доказати да права BF полови страницу AD.

3. Ако график функције $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - ax + 2}$ садржи тачку $M\left(-3, \dfrac{1}{19}\right)$, оредити највећу вредност функције f.

4. У равни је дато 50 тачака, међу којима је тачно 7 четворки колинеарних тачака. Колико највише различитих правих може бити одређено овим скупом тачака?

5. Раван α дели тространу пирамиду на два дела. Ако она сече бочне ивице пирамиде у размерама $1 : 2$, $1 : 2$ и $2 : 1$ (од врха), одредити однос запремина добијених делова пирамиде.

6. Одредити све вредности реалног параметра a за које алгебарска једначина $x^5 - 5x + a = 0$ има двоструке нуле.

7. Одредити центар и полупречник кружнице дате једначинама:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 40, \\ x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 16z = 0. \end{cases}$$

8. Нека је (X, d) метрички простор, $x_0 \in X$ и $A \subseteq X$.
(а) Доказати да важи $d(x_0, A) = d(x_0, \overline{A})$.
(б) Проверити да ли за сваки скуп $A \subseteq X$ и сваку тачку $x_0 \in X$ важи

$$d(x_0, A) = d(x_0, \mathrm{Int}A).$$

9. Нека је $\varphi : (\mathbb{R}^2, +) \to (\mathbb{R}^2, +)$, где је сабирање у $\mathbb{R}^2$ дефинисано као сабирање по координатама, пресликавање дато са $\varphi(x, y) = (ax + by, x + y)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Одредити за које a и b је пресликавање φ мономорфизам.

10. (а) Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = (x + 1)\mathrm{e}^{1/2+1/(x-1)}$.
(б) Одредити угао под којим график дате функције сече x осу.