Пријемни испит из МАТЕМАТИКЕ за упис на
Мастер академске студије МАТЕМАТИКЕ

9. октобар 2019. године

Време за рад је 180 минута.
Тест има 10 задатака. **Комплетно решени** задаци 1 – 4. вреде по 3 поена, задаци 5 – 8. вреде по 4 поена и задаци 9. и 10. вреде по 6 поена.

ИМЕ И ПРЕЗИМЕ: ____________________

БРОЈ ОСВОЈЕНИХ ПОЕНА: ____________________

1. У кутији се налази 1000 црвених, 1000 плавих и 19 зелених куглица. Ако на случајан начин извлачимо куглице (без гледања), колико се најмање куглица мора извући да би били сигурни да смо извукли:

(а) бар једну куглицу од сваке боје;

(б) све куглице бар једне боје?

2. Ако конвексан четвороугао $ABCD$ има два пара подударних суседних углова, $\alpha \cong \beta$ и $\gamma \cong \delta$, доказати да је $AD \cong BC$ и $AC \cong BD$.

3. Основа косе призме је $\triangle ABC$ са страницама $a = 7\,\mathrm{cm}$ и $b = 8\,\mathrm{cm}$ и углом $\gamma = 120^\circ$. Бочна ивица $\ell = 9\,\mathrm{cm}$ призме нагнута је према равни основе под углом од 30°. Израчунај запремину те призме.

4. Одреди све вредности параметра m за које су решења квадратне једначине

$$(m^2 + m - 6)x^2 + 2mx + 1 = 0$$

различити негативни бројеви.

5. Одредити растојање између паралелних правих

$$p: \quad \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2} \qquad \text{и} \qquad q: \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

6. Дати су вектори $a_1 = (4,4,3)$, $a_2 = (7,2,1)$, $a_3 = (4,1,6)$ и $a_4 = (5,9,\lambda)$. Одредити λ, ако се зна да се вектор a_4 може изразити као линеарна комбинација вектора a_1, a_2 и a_3.

7. Доказати да функција $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задата са $f(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ представља растојање (метрику) на скупу реалних бројева.

8. Одредити остатак при дељењу полинома $(x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$, полиномом $x^2 + x + 1$.

9. Нека у прстену $(P, +, \cdot)$ важи $(\forall a \in P)\ a^2 = a$. Доказати:

(а) $(\forall a \in P)\ a + a = 0$;

(б) прстен $(P, +, \cdot)$ је комутативан.

10. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x-3)^2}$.